Лекция 13
РЯДЫ ДИРИХЛЕ С ВЕЩЕСТВЕННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{\lambda_n z}$ называются **рядами Дирихле**. Будем рассматривать ряды вида $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$, где показатели λ_n таковы, что $0 < \lambda_n \uparrow \infty$. Напомним **преобразование Абеля**, или **тождество Абеля**,

$$\sum_{n=p}^{q} A_n B_n = \sum_{n=p}^{q-1} (B_n - B_{n+1}) C_n + B_q C_q,$$

где A_n и B_n — произвольные числа, $C_n = A_p + \ldots + A_n$.

Теорема 13.1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ сходится в точке z_0, тогда он сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$. В любом секторе $|\arg(z - z_0)| \le \le \theta < \frac{\pi}{2}$ ряд сходится равномерно.

Доказательство. Положим $A_n = a_n e^{-\lambda_n z_0}$, $B_n = e^{-\lambda_n (z - z_0)}$, тогда

$$\sum_{n=p}^{q} a_n e^{-\lambda_n z} = \sum_{n=p}^{q} A_n B_n.$$

Так как $B_n - B_{n+1} = (z - z_0) \int\limits_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-(z-z_0)\lambda} d\lambda$, то

$$\left|B_n - B_{n+1}\right| \le \left|z - z_0\right| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-(x-x_0)\lambda} d\lambda,$$

где $z = x + iy$, или

$$\left|B_n - B_{n+1}\right| \le \frac{\left|z - z_0\right|}{x - x_0} \left[e^{-(x-x_0)\lambda_n} - e^{-(x-x_0)\lambda_{n+1}}\right].$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ сходится по условию в точке z_0, тем самым

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) \;\; \forall n \ge N(\varepsilon), \forall p \in \mathbb{N} \to \left|C_n\right| = \left|\sum_{m=n}^{n+p} A_m\right| < \varepsilon.$$

Используя преобразование Абеля для всех z из сектора $|\arg(z-z_0)| \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$, будем иметь

$$\left|\sum_{m=n}^{n+p} a_m e^{-\lambda_m z}\right| \leq \frac{\varepsilon}{\cos\theta}\Big[e^{-(x-x_0)\lambda_n} - e^{-(x-x_0)\lambda_{n+p}} + e^{-(x-x_0)\lambda_{n+1}} -$$
$$- e^{-(x-x_0)\lambda_{n+2}} + \ldots + e^{-(x-x_0)\lambda_{n+p-1}} - e^{-(x-x_0)\lambda_{n+p}} +$$
$$+ e^{-(x-x_0)\lambda_{n+p}}\Big] = \frac{\varepsilon}{\cos\theta} e^{-(x-x_0)\lambda_n}.$$

Следовательно, в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$, а также в секторе $|\arg(z-z_0)| \leq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ справедлива оценка

$$\left|\sum_{m=n}^{n+p} a_m e^{-\lambda_m z}\right| < \frac{\varepsilon}{\cos\theta}. \tag{13.1}$$

Итак, в этом секторе ряд Дирихле сходится равномерно и, следовательно, в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ сумма ряда есть аналитическая функция. Теорема доказана. ■

Из оценки (13.1) следует, что

$$\left|\sum_{m=n}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m z}\right| < \frac{\varepsilon}{\cos\theta} e^{-(x-x_0)\lambda_n}, \quad n \geq N(\varepsilon) \text{ в секторе } \left|\arg(z-z_0)\right| \leq \theta < \frac{\pi}{2}.$$

Если $f(z)$ — сумма ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$, то, представив функцию $f(z)$ в виде

$$f(z) = \sum_{m=1}^{n-1} a_m e^{-\lambda_m z} + R_n(z),$$

получим оценку

$$\left|R_n(z)\right| \leq \frac{\varepsilon}{\cos\theta} e^{x_0\lambda_n} e^{-x\lambda_n} = \beta e^{-x\lambda_n}, \quad n \geq N(\varepsilon).$$

Пусть n фиксировано, тогда и β фиксировано, поэтому

$$f(z) = e^{-\lambda_1 z}\left[a_1 + a_2 e^{-(\lambda_2-\lambda_1)z} + \ldots + a_{n-1} e^{-(\lambda_{n-1}-\lambda_1)z} + e^{\lambda_1 z} \cdot R_n(z)\right] =$$
$$= e^{-\lambda_1 z}(a_1 + A).$$

Оценим A:

$$|A| \leq |a_2| e^{-(\lambda_2-\lambda_1)x} + \ldots + |a_{n-1}| e^{-(\lambda_{n-1}-\lambda_1)x} + \beta e^{-(\lambda_n-\lambda_1)x}.$$

Пусть z лежит в секторе $|\arg(z - z_0)| \le \theta < \frac{\pi}{2}$ и $x \to +\infty$. Получим

$$f(z) = e^{-\lambda_1 z}[a_1 + O(1)] \quad \text{или} \quad f(z) \cong a_1 e^{-\lambda_1 z}, \quad \text{если } a_1 \ne 0.$$

Отсюда следует, что если в ряде не все коэффициенты равны нулю, то сумма ряда $f(z) \ne 0$ в секторе при больших x. Откуда следует единственность разложения $f(z)$ в ряд Дирихле, т.е.

$$\text{если } f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \quad f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n z}, \quad \operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0,$$

то $a_n = b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Определение. Полуплоскость $\operatorname{Re} z > c$ называется ***полуплоскостью сходимости***, прямая $\operatorname{Re} z = c$ — ***прямой сходимости***, c — ***абсциссой сходимости ряда Дирихле***, если ряд Дирихле сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z > c$ и расходится в полуплоскости $\operatorname{Re} z < c$. Если ряд Дирихле сходится всюду, то полагают $c = -\infty$; если ряд Дирихле расходится всюду, то полагают $c = +\infty$.

Так как справедливо неравенство

$$\left|a_k e^{-\lambda_k z}\right| \le \left|a_k e^{-\lambda_k z_0}\right|, \quad \operatorname{Re} z \ge \operatorname{Re} z_0,$$

то ряд Дирихле сходится абсолютно и равномерно в полуплоскости $\operatorname{Re} z \ge \operatorname{Re} z_0$, если ряд Дирихле сходится абсолютно в точке z_0.

Определение. Полуплоскость $\operatorname{Re} z > \alpha$ называется ***полуплоскостью абсолютной сходимости***, прямая $\operatorname{Re} z = \alpha$ — ***прямой абсолютной сходимости***, α — ***абсциссой абсолютной сходимости***, если ряд Дирихле сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha$ и не сходится абсолютно в полуплоскости $\operatorname{Re} z < \alpha$. Если ряд Дирихле всюду сходится абсолютно, то полагают $\alpha = -\infty$; если ряд Дирихле нигде не сходится абсолютно, то полагают $\alpha = +\infty$.

Из определений абсцисс сходимости и абсолютной сходимости следует, что $c \le \alpha$.

Пусть абсцисса абсолютной сходимости $\alpha < +\infty$, тогда при $\varepsilon > 0$ в полуплоскости $\operatorname{Re} z > \alpha + \varepsilon$ ряд Дирихле сходится равномерно.

Определение. Нижняя грань множества чисел a таких, что в полуплоскости $\operatorname{Re} z > a$ ряд Дирихле сходится равномерно, называется ***абсциссой равномерной сходимости***.

Итак, имеем неравенства

$$c \le r \le \alpha.$$

Теорема 13.2. Пусть $L = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln n}{\lambda_n}$. Тогда $\alpha - c \le L$.

Доказательство. Будем считать $L < \infty$ ($L = \infty$ — тривиально). Пусть ряд Дирихле сходится в точке z_0. Покажем, что в полуплоскости $\mathrm{Re}\,z > \mathrm{Re}\,z_0 + L$ ряд Дирихле сходится абсолютно. Пусть $\mathrm{Re}\,z = \mathrm{Re}\,z_0 + L + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$.

Из условия следует, что при $n \ge N(\varepsilon_1)$ $\quad \lambda_n < \ln n^{\frac{1}{L+\varepsilon_1}}$, тем самым

$$\left|a_n e^{-\lambda_n z}\right| = \left|a_n e^{-\lambda_n z_0} e^{-\lambda_n (z - z_0)}\right| < \left|a_n e^{-\lambda_n z_0}\right| e^{-\lambda_n (L+\varepsilon)} < M \frac{1}{n^{\mu}},$$

где $\mu = \dfrac{L+\varepsilon}{L+\varepsilon_1} > 1$. Следовательно, ряд сходится абсолютно в полуплоскости $\mathrm{Re}\,z > \mathrm{Re}\,z_0 + \alpha$. Теорема доказана. ■

Следствие. Если $L = 0$, то абсциссы простой и асболютной сходимости совпадают.

Теорема 13.3. Пусть $L = 0$, тогда абсцисса абсолютной сходимости ряда Дирихле $\alpha = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln|a_n|}{\lambda_n}$.

Доказательство. Положим $\alpha = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln|a_n|}{\lambda_n}$. Докажем, что в полуплоскости $\mathrm{Re}\,z > \alpha$ ряд сходится, а в полуплоскости $\mathrm{Re}\,z < \alpha$ — расходится.

Пусть $\mathrm{Re}\,z = \alpha + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и ε_1, ε_2 таковы, что $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$, $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon - \varepsilon_1$. Из условия и из определения α следует, что

$$|a_n| < e^{(\alpha+\varepsilon_1)\lambda_n}, \quad \lambda_n > \ln n^{1/\varepsilon_2}, \quad n \ge N.$$

Отсюда следует, что

$$\left|a_n e^{-\lambda_n z}\right| < \left|e^{(\alpha+\varepsilon_1 - z)\lambda_n}\right| = e^{-(\varepsilon-\varepsilon_1)\lambda_n} < \frac{1}{n^{\mu}}, \quad \mu = \frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} > 1.$$

т.е. ряд сходится в точке z.

Пусть теперь $\mathrm{Re}\,z = \alpha - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ и $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon$. Из определения α следует, что существует последовательность $\{\lambda_{n_k}\}$, $n_k \in \mathbb{N}$ такая, что

$$|a_n| > e^{(\alpha-\varepsilon_1)\lambda_n}, \quad n = n_k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Поэтому справедливо неравенство

$$\left|a_n e^{-\lambda_n z}\right| > \left|e^{(\alpha-\varepsilon_1-z)\lambda_n}\right| = e^{(\varepsilon-\varepsilon_1)\lambda_n} > 1, \quad n = n_k, \;\; k = 1, 2, \ldots,$$

т.е. ряд в точке z расходится. Теорема доказана. ■

Формула $\alpha = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{\ln|a_n|}{\lambda_n}$ аналогична формуле Коши—Адамара для определения радиуса сходимости степенного ряда.

Выразим коэффициенты ряда Дирихле через его сумму. Справедлива следующая теорема.

Теорема 13.4. Пусть абсцисса абсолютной сходимости α ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ удовлетворяет условию $\alpha < +\infty$. Если $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$, то

$$a_n e^{-\lambda_n x} = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} f(x+iy)e^{iy\lambda_n}dy, \quad n \geq 1, \;\; x > \alpha,$$

t_0 — фиксированное число.

Доказательство. Преобразуем интеграл $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_{t_0}^{T} f(z)e^{\lambda_n z}dy$:

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} f(z)e^{\lambda_n z}dy = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T}\left(\sum_{\substack{m\neq n\\ m=0}}^{N} a_m e^{(\lambda_n-\lambda_m)z}\right)dy + \frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} a_n dy +$$

$$+\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} e^{\lambda_n z}\left(\sum_{m=N+1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m z}\right)dy.$$

Проведем оценки слагаемых. Имеем

$$\left|e^{\lambda_n z}\sum_{m=N+1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m z}\right| \leq e^{\lambda_n x}\sum_{m=N+1}^{\infty} |a_m| e^{-\lambda_m x} < \varepsilon$$

при больших N в силу абсолютной сходимости ряда Дирихле. Поэтому последнее слагаемое в сумме не превосходит $\varepsilon\dfrac{T-t_0}{T}$.

Так как при вещественном $A \neq 0$ интеграл

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} e^{Az}dy = e^{Ax}\frac{1}{T}\frac{e^{iAT}-e^{iAt_0}}{Ai}$$

стремится к нулю при $T\to\infty$, то первое слагаемое в сумме стремится к нулю при $T\to\infty$. Следовательно,

$$a_n = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} f(z)e^{\lambda_n z}dy,$$

или

$$a_n e^{-\lambda_n x} = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{T}\int_{t_0}^{T} f(x+iy)e^{iy\lambda_n}dy, \quad x > \alpha.$$

Теорема доказана. ■

Следствие. Положим

$$M(x) = \sup_{-\infty<y<+\infty}\left|f(x+iy)\right|, \quad x > \alpha,$$

тогда

$$\left|a_n\right| \le M(x)e^{\lambda_n x}, \quad n \ge 1, \;\; x > \alpha.$$

Неравенства следуют сразу из доказанной теоремы 13.4 и являются **аналогом неравенств Коши для коэффициентов степенного ряда**.

Аналог теоремы Лиувилля. Пусть ряд Дирихле $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ сходится во всей плоскости и $M(x) < Ae^{\alpha|x|}$, тогда сумма ряда $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ есть конечная сумма

$$f(z) = \sum_{\lambda_n\le\alpha} a_n e^{-\lambda_n z}.$$

Задачи

I. Найти множество точек сходимости следующих рядов:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}e^{n^2\sqrt{n}z}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{(-1)^n nz}}{n^2}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2}(e^{n^2 z} + e^{-n^2 z})$.

II. Найти абсциссы сходимости, абсолютной и равномерной сходимости ряда Дирихле:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-zn}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-zn}$; 3) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 z}$; 4) $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n^3}e^{-n^2 z}$;

5) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-z\ln n}$; 6) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-z\ln n}$; 7) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}e^{-z\ln n}$;

8) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-z\ln\ln n}$; 9) $\sum_{n=0}^{\infty}e^{-n^2}e^{-n^2 z}$.

III. Привести пример ряда Дирихле:

1) который сходится на всей плоскости;

2) который всюду расходится;

3) для которого существует конечная асбцисса сходимости.

IV. Привести пример ряда Дирихле:

1) который сходится абсолютно на всей плоскости;

2) который абсолютно расходится всюду;

3) для которого существует конечная абсцисса абсолютной сходимости.

V. Пусть α — абсцисса абсолютной сходимости ряда Дирихле, c — абсцисса сходимости и $\overline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln n}{\lambda_n} = L$, где ряд Дирихле имеет вид $\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\lambda_n z}$. Привести пример ряда Дирихле, для которого $\alpha - c = L$.